«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректор з наукової роботи
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
_____Ганна ТОЛСТАНОВА
«___» _____ 2026 р.

ВИСНОВОК
Київського національного університету імені Тараса Шевченка про наукову новизну, теоретичне та практичне значення результатів дисертації Приходько Ольги Дмитрівни на тему: «Оцінювання параметрів в афінних дифузійних моделях з довгостроковою залежністю», поданої на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 112 Статистика

Витяг
з протоколу № 14 засідання кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики
від «12» березня 2026 року

Присутні: Головуючий на засіданні – зав. кафедри, доктор фіз.-мат. наук, доцент Ямненко Р.Є.; доктор фіз.-мат. наук, доцент Ральченко К.В. (науковий керівник); доктор фіз.-мат. наук, професор Мішура Ю.С.; доктор фіз.-мат. наук, професор Майборода Р.Є.; доктор фіз.-мат. наук, доцент Кнопова В.П.; доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник Сахно Л.М.; доктор фіз.-мат. наук, доцент Голомозий В.В.; кандидат фіз.-мат. наук, доцент Борисенко О.Д.; кандидат фіз.-мат. наук, доцент Зубченко В.П.; кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник Яневич Т.О.; кандидат фіз.-мат. наук, асистент Боднарчук І.М.; доктор філософії, асистент Мірошніченко В.О.; доктор філософії, асистент Манікін Б.І.

Запрошені: завідувачка кафедри прикладної статистики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фіз.-мат. наук, професор Розора І.В.; доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» Іванов О.В.; доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка Погоруй А.О.

Серед присутніх 10 докторів фізико-математичних наук, 4 кандидати фізико-математичних наук і 2 доктори філософії – фахівці зі спеціальності, з якої виконувалась дисертація. Засідання кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики проходило в онлайн-форматі за посиланням https://knu-ua.zoom.us/j/81807975980?pwd=oFAsdkYW5ejKsxdkpR4P5WqxeJstxc.1

Порядок денний:

Обговорення дисертаційного дослідження аспірантки кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Приходько Ольги Дмитрівни на тему «Оцінювання параметрів в афінних дифузійних моделях з довгостроковою залежністю», поданого на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 112 Статистика.

Науковий керівник – доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка Костянтин Володимирович Ральченко.

Дисертація виконувалась на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Тема дисертації затверджена на засіданні Вченої ради механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 4 від 10 листопада 2022 року).

Виступили:

Здобувачка Приходько Ольга Дмитрівна представила презентацію за основними положеннями дисертації «Оцінювання параметрів в афінних дифузійних моделях з довгостроковою залежністю», поданої на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 112 Статистика.

Аспірантка Приходько О.Д. обґрунтувала актуальність теми дослідження; ознайомила з метою, завданнями, об'єктом, предметом та методами дослідження; надала відомості про структуру дисертації; представила найбільш вагомі отримані результати; презентувала відомості про апробацію результатів на конференціях і семінарах, а також про публікації за темою дослідження.

Після закінчення презентації Приходько О.Д. присутніми на захисті фахівцями були поставлені наступні запитання:

Доктор фізико-математичних наук, доцент Голомозий В.В.: У доповіді Ви зазначили, що переходите від неперервних траєкторій до дискретних. Прошу уточнити: яким чином формуються ці дискретизації і що саме використовується в симуляціях?

Приходько О.Д.: З теоретичної точки зору дискретні спостереження розглядаються як значення процесу у фіксованих точках часу. Наприклад, у

моделі Кокса–Інгерсолла–Росса використовується сітка $n^{-\beta}$, що дозволяє отримати необхідну кількість спостережень.

Доктор фізико-математичних наук, доцент Голомозий В.В.: А як саме здійснюється моделювання? Чи генеруються неперервні траєкторії, чи одразу дискретні?

Приходько О.Д.: У чисельних експериментах генеруються безпосередньо дискретні значення процесу, оскільки неперервні траєкторії у точному вигляді змоделювати неможливо.

Доктор фізико-математичних наук, доцент Голомозий В.В.: Які саме методи генерації використовуються для різних моделей?

Приходько О.Д.: Для моделі Васічека використовувались готові реалізації (зокрема пакет Sim.DiffProc).

Для моделей Кокса–Інгерсолла–Росса та Орнштейна–Уленбека реалізовано чисельні схеми, що базуються на стандартних методах (Ейлера, Мільштейна).

Для моделювання темперованого дробового броунівського руху застосовано адаптацію методу Девіса–Харта.

Доктор фізико-математичних наук, доцент Голомозий В.В.: Як обґрунтовується адекватність отриманих симуляцій – зокрема, чи зберігається коваріаційна структура процесу?

Приходько О.Д.: Використані методи забезпечують правильну коваріаційну структуру. Зокрема, метод Девіса–Харта будує гауссів вектор із заданою коваріаційною функцією.

Доктор фізико-математичних наук, доцент Розора І. В.: У другому розділі оцінюються три параметри, а в наступних – лише частина. Чим обумовлений такий підхід?

Приходько О.Д.: У моделі Кокса–Інгерсолла–Росса існують добре відомі методи окремого оцінювання параметра σ, тому в роботі основна увага приділена оцінюванню інших параметрів – a та b.

Доктор фізико-математичних наук, доцент Розора І. В.: Чи можна узагальнити метод на одночасне оцінювання всіх параметрів?

Приходько О.Д.: Це питання потребує окремого дослідження; у межах роботи воно не розглядалося.

Доктор фізико-математичних наук, доцент Розора І. В.: Чи правильно, що у всій роботі параметри темперованого дробового броунівського руху H та λ вважаються додатними?

Приходько О.Д.: Так, цей процес коректно визначений лише для додатних значень параметрів.

Після відповідей на запитання виступили:

Науковий керівник – доктор фізико-математичних наук, доцент Ральченко К.В. відзначив актуальність, новизну та наукову цінність отриманих результатів.

Було підкреслено, що у другому розділі отримано нові результати для класичної моделі Васічека, а саме – побудовано оцінки всіх трьох параметрів за дискретними спостереженнями з фіксованим кроком, без припущень високочастотних даних. Доведено їх строгу конзистентність і асимптотичну нормальність із явним виглядом асимптотичної коваріаційної матриці.

Щодо моделі Кокса–Інгерсолла–Росса зазначено, що використано ергодичний підхід, який природно приводить до оцінювання двох параметрів. При цьому важливим є те, що результати отримані без припущення виконання умови Феллера $2a > \sigma^2$, що розширює область застосування моделі. Відзначено, що ці результати вже знайшли відображення в подальших дослідженнях інших авторів.

У частині, присвяченій моделям із темперованим дробовим броунівським рухом, підкреслено новизну отриманих результатів і їх значення для подальшого розвитку теорії параметричного оцінювання в моделях із довгостроковою залежністю.

Загалом відзначено високий рівень самостійності здобувачки, коректність отриманих результатів, а також належний рівень чисельної реалізації (зокрема з використанням мови R).

У підсумку науковий керівник зазначив, що дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, яке відповідає вимогам до дисертацій на здобуття ступеня доктора філософії, і запропонував підтримати її.

Рецензенти дисертаційної роботи, які наголосили на позитивних аспектах дослідження та висловили свої побажання та зауваження:

Доктор фізико-математичних наук, доцент Розора І. В. відзначила, що дисертаційна робота є актуальною, містить нові наукові результати та має як теоретичне, так і прикладне значення. Було позитивно оцінено глибину дослідження, коректність математичних доведень і якість чисельних експериментів.

Разом із тим висловлено такі зауваження та побажання:

1. Доцільно більш детально обґрунтувати припущення про відомість параметра σ процесу Кокса–Інгерсолла–Росса.

2. В означенні темперованого дробового броунівського руху варто явно зазначити обмеження на параметри: $H > 0, \lambda > 0$.

У цілому робота заслуговує позитивної оцінки та може бути рекомендована до захисту.

Доктор фізико-математичних наук, доцент Голомозий В.В. також відзначив високий науковий рівень дисертації. Було підкреслено складність досліджуваних моделей, зокрема наявність нетривіальних шумів (темперований дробовий броунівський рух), а також коректність і змістовність проведених чисельних експериментів.

Рецензент зазначив, що робота містить суттєві результати, які розширюють існуючі підходи до оцінювання параметрів стохастичних дифузійних моделей, і в цілому справляє дуже позитивне враження.

В **обговоренні** дисертаційного дослідження взяли участь:

Доктор фізико-математичних наук, професор Мішура Ю.С. також підкреслила необхідність більш чіткої структуризації доповіді під час захисту, зокрема із зазначенням номерів теорем і лем відповідно до тексту дисертації.

Окрім цього, було відзначено високий рівень підготовки здобувачки, систематичність її наукової роботи протягом періоду навчання в аспірантурі, своєчасність виконання всіх вимог та наявність публікацій у фахових наукових виданнях.

Приходько О.Д. подякувала за зауваження та зазначила, що врахує його під час доопрацювання роботи.

Доктор фізико-математичних наук, доцент Ямненко Р.Є. відзначив високий рівень презентації, водночас підтримав зауваження щодо необхідності чіткішої нумерації результатів у доповіді та їх прив'язки до тексту дисертації для зручності сприйняття.

ВИСНОВОК

про наукову новизну, теоретичне та практичне значення результатів дисертації Приходько Ольги Дмитрівни на тему: «Оцінювання параметрів в афінних дифузійних моделях з довгостроковою залежністю» поданої на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 112 Статистика

1.Обґрунтування вибору теми дослідження. Дисертаційну роботу присвячено задачам оцінювання параметрів у низці афінних дифузійних моделей, зокрема в моделях Васічека, Кокса–Інгерсолла–Росса та Орнштейна–Уленбека, у тому числі за наявності довгострокової залежності. Поряд із побудовою та аналізом статистичних оцінок у роботі також досліджено низку допоміжних властивостей розглянутих процесів, необхідних для обґрунтування асимптотичних результатів. Зважаючи на широку застосовність зазначених моделей у фінансовій математиці та суміжних галузях, подальший теоретичний

аналіз і розвиток методів оцінювання параметрів є важливими для підвищення якості статистичного аналізу та прогнозування.

Актуальність дослідження зумовлена поєднанням кількох чинників: широкою прикладною значущістю афінних дифузійних моделей, обмеженістю класичних методів оцінювання у випадку дискретних спостережень і стандартного броунівського шуму, а також необхідністю врахування довгострокової залежності в сучасних стохастичних моделях. Розробка та обґрунтування статистичних методів оцінювання параметрів у таких умовах є важливим кроком як для подальшого розвитку теорії та статистики випадкових процесів, так і для розв'язання актуальних прикладних задач фінансової та економічної статистики.

2. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Дане дослідження виконано на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка у рамках державної бюджетної науково-дослідної теми №22БФ038-01 «Стохастичні динамічні системи, неоднорідні у часі або з випадковим часом: асимптотика та статистичний аналіз» (номер державної реєстрації 0122U001843), що входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

3. Мета і завдання дослідження. Мета дослідження полягає у розробці та теоретичному обґрунтуванні статистичних методів оцінювання параметрів афінних дифузійних моделей, що задаються стохастичними диференціальними рівняннями, зокрема моделей Васічека, Кокса–Інгерсолла–Росса та Орнштейна–Уленбека, за умов неперервних і дискретних спостережень, а також у встановленні асимптотичних властивостей побудованих оцінок, зокрема строгої конзистентності та асимптотичної нормальності.

Для досягнення поставленої мети було сформульовано наступні завдання:

- дослідити статистичні задачі оцінювання параметрів у моделі Васічека за дискретними спостереженнями, побудувати оцінки всіх параметрів моделі та встановити їх строгу конзистентність і асимптотичну нормальність;
- розробити методи оцінювання параметрів зсуву моделі Кокса–Інгерсолла–Росса на основі неперервних і дискретних спостережень, дослідити асимптотичні властивості відповідних оцінок – строгу конзистентність та асимптотичну нормальність;
- дослідити задачу оцінювання параметрів неергодичної моделі Орнштейна–Уленбека, керованої темперованими дробовими броунівськими процесами, отримати верхні оцінки для приростів керуючих процесів, побудувати оцінки параметра зсуву в неперервному і дискретному випадках та обґрунтувати їх строгу конзистентність;
- розробити методи моделювання темперованого дробового броунівського руху та темперованого дробового броунівського руху другого роду, необхідні для чисельної реалізації та статистичного дослідження відповідних моделей;

- провести чисельну перевірку отриманих теоретичних результатів за допомогою моделювання відповідних випадкових процесів та статистичних оцінок.

4. Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є афінні дифузійні моделі, що задаються стохастичними диференціальними рівняннями, зокрема моделі Васічека, Кокса–Інгерсолла–Росса та Орнштейна–Уленбека, керовані вінерівським процесом або темперованими дробовими броунівськими процесами.

5. Предмет дослідження. Предметом дослідження є статистичні методи оцінювання параметрів афінних дифузійних моделей за неперервними та дискретними спостереженнями, а також асимптотичні властивості відповідних оцінок.

6. Методи дослідження. Для отримання теоретичних результатів використано методи математичного аналізу, теорії ймовірностей, математичної статистики та теорії випадкових процесів, зокрема методи асимптотичного аналізу стохастичних інтегралів і мартингальні методи. Чисельне моделювання даних виконано засобами мови програмування R.

7. Наукова новизна дослідження. У дисертаційній роботі отримано нові теоретичні результати у задачах статистичного оцінювання параметрів афінних дифузійних моделей. Зокрема, побудовано нові статистичні оцінки параметрів для низки моделей, досліджено їх асимптотичні властивості та встановлено умови строгої конзистентності й асимптотичної нормальності. Крім того, отримано нові властивості розглянутих стохастичних процесів, необхідні для обґрунтування відповідних статистичних результатів. У роботі одержано такі нові результати:

- у моделі Васічека за дискретними спостереженнями доведено збіжність майже напевно нормованих сум спостережень, їх квадратів та добутків сусідніх пар спостережень до невипадкових границь; встановлено результати щодо асимптотичної поведінки дисперсій та коваріацій відповідних статистик;
- побудовано оцінки одночасно для трьох параметрів моделі Васічека на основі дискретних спостережень та доведено їх строгу конзистентність і асимптотичну нормальність;
- отримано явний вигляд асимптотичної коваріаційної матриці для оцінок параметрів моделі Васічека, що дозволяє визначити теоретичні стандартні відхилення відповідних оцінок;
- у моделі Кокса–Інгерсолла–Росса досліджено оцінку параметрів зсуву, побудовану за узагальненим методом моментів на основі неперервних спостережень, яка, на відміну від більшості відомих у літературі підходів, коректно визначена для всіх додатних значень параметрів моделі, та доведено її асимптотичну нормальність;
- на основі неперервної оцінки параметрів зсуву моделі Кокса–Інгерсолла–Росса побудовано оцінку за дискретними спостереженнями та доведено її

строгу конзистентність і асимптотичну нормальність; отримана дискретна оцінка також є визначеною для всіх додатних значень параметрів;

- отримано явні вирази для асимптотичних коваріаційних матриць неперервної та дискретної оцінок параметрів зсуву моделі Кокса–Інгерсолла–Росса, що дозволяє визначити їх теоретичні стандартні відхилення;
- отримано оцінки дисперсій та приростів темперованого дробового броунівського руху (ТДБР) і темперованого дробового броунівського руху другого роду (ТДБРІІ), а також встановлено асимптотичні межі для приростів цих процесів;
- у моделях Орнштейна–Уленбека, керованих ТДБР та ТДБРІІ, досліджено оцінку параметра зсуву, побудовану методом найменших квадратів за неперервними спостереженнями, та доведено її строгу конзистентність;
- на основі неперервної оцінки параметра зсуву в моделях Орнштейна–Уленбека, керованих ТДБР та ТДБРІІ, побудовано дискретну оцінку та доведено її строгу конзистентність;
- розроблено та реалізовано алгоритми моделювання темперованого дробового броунівського руху та темперованого дробового броунівського руху другого роду, що може бути використаний для чисельного дослідження статистичних методів у моделях із довгостроковою залежністю.

8. Теоретичне значення. Дисертаційна робота має переважно теоретичний характер і присвячена дослідженню статистичних властивостей оцінок параметрів афінних дифузійних моделей. Одержані результати спрямовані насамперед на розвиток теорії статистичного оцінювання параметрів стохастичних диференціальних рівнянь.

9. Практичне значення. Отримані результати можуть бути використані у задачах статистичного аналізу та моделювання випадкових процесів, зокрема при калібруванні афінних дифузійних моделей за експериментальними або фінансовими даними та статистичному оцінюванні параметрів моделей Васічека, Кокса–Інгерсолла–Росса та Орнштейна–Уленбека за неперервними і дискретними спостереженнями. Отримані результати також можуть застосовуватися при розв'язанні прикладних задач фінансової та економічної статистики, зокрема під час моделювання та прогнозування динаміки відсоткових ставок і пов'язаних фінансових індикаторів. Розроблений алгоритм моделювання темперованого дробового броунівського руху та темперованого дробового броунівського руху другого роду може бути використаний для чисельних експериментів і статистичного дослідження моделей із довгостроковою залежністю.

10. Особистий внесок здобувача. Усі основні наукові результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У статтях, опублікованих у співавторстві з науковим керівником, здобувачу належать проведення досліджень, отримання та доведення основних результатів.

Науковому керівнику належать постановка задач, наукове консультування, участь в обговоренні результатів та перевірка отриманих висновків.

11. Апробація результатів дослідження. Результати дисертаційного дослідження були представлені та обговорені на таких міжнародних конференціях:

1) I Міжнародна науково-практична конференція студентів та молодих вчених «Математика та математичне моделювання у сучасному технічному університеті», 30 листопада, 2022, Луцьк, Україна;

2) XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023», 14 квітня, 2023, Київ, Україна;

3) International Conference of Young Mathematicians, June 1–3, 2023, Kyiv, Ukraine;

4) XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського, 11–12 жовтня 2023, Київ, Україна;

5) Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2023», December 26-27, 2023, Kyiv, Ukraine;

6) XXII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2024», 11 квітня, 2024, Київ, Україна;

7) XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, 9-11 травня, 2024, Київ, Україна;

8) Ukraine Mathematics Conference At the End of the Year 2024, December 16-18, 2024, Kyiv, Ukraine;

9) XXIII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2025», 10 квітня, 2025, Київ, Україна;

10) International Conference of Young Mathematicians, June 4–6, 2025, Kyiv, Ukraine;

11) XX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 17–20 листопада, 2025, Київ, Україна.

Також отримані результати було представлено на таких семінарі:

Аспірантський воркшоп з теорії ймовірностей, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету та кафедра дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, 4 лютого 2026 року.

12. Публікації. За результатами дослідження опубліковано:

- 4 статті у періодичних фахових виданнях, що індексуються в наукометричній базі Scopus, серед яких одна стаття опублікована у виданні, що належить до квартиля Q2, одна стаття – до квартиля Q3, а ще дві статті опубліковано у виданнях, що належать до квартиля Q4 відповідно до класифікації SCImago Journal Rank;
- 11 тез доповідей на конференціях.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України:
(які входять до переліку МОН України)

1) Prykhodko O., Ralchenko K. Strongly consistent estimation of all parameters in the Vasicek model by discrete observations // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. 2022. No. 4. P. 26–30.
DOI: 10.17721/1812-5409.2022/4
Квартиль: Q4

2) Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic normality of estimators for all parameters in the Vasicek model by discrete observations // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2024. Vol. 111. P. 123 – 135
DOI: 10.1090/tpms/1218
Квартиль: Q4

3) Prykhodko O., Ralchenko K. Drift parameter estimation for tempered fractional Ornstein–Uhlenbeck processes based on discrete observations // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2026. Vol. 13, no. 2. P. 169 – 194
DOI: 10.15559/25-VMSTA289
Квартиль: Q2

Статті в іноземних виданнях:
(статті у періодичних наукових виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus (крім видань держави, визнаної Верховною Радою України державою-агресором))

1) Prykhodko O., Ralchenko K. Discretization and Asymptotic Normality of Drift Parameters Estimator in the Cox-Ingersoll-Ross Model // Austrian Journal of Statistics. 2025. Vol. 54, no. 1. P. 82 – 99
DOI: 10.17713/ajs.v54i1.1968
Квартиль: Q3

Тези, опубліковані за матеріалами конференцій

1) Prykhodko O., Ralchenko K. Estimation of all parameters in the Vasicek model by low-frequency data // Математика та математичне моделювання у сучасному технічному університеті. [Електронний ресурс]: Збірник тез доповідей I Міжнародної науково-практичної конференції студентів та молодих вчених. Луцьк, Україна : Луцьк: ДонНТУ. 2022. С. 62–63.

2) Приходько О. Д., Ральченко К. В. Асимптотичні властивості оцінок параметрів моделі Васічека за дискретними спостереженнями // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2023». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2023. С. 47.

3) Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic behavior of the parameter estimators in the Vasicek model based on discrete observations // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. 2023. Accessmode: https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/PS/Prykhodko-Ralchenko.pdf.

4) PrykhodkoO., Ralchenko K.Asymptotic normality of estimators for all parameters in the Vasicek model by discrete observations // XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського : Тези доповідей. Київ, Україна : КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2023. С. 144–145.
5) Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic behavior of estimators for all parameters in the Vasicek model by discrete observations // Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2023» : Book of abstracts. Kyiv, Ukraine : Taras Shevchenko National University of Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. 2023. P. 47.
6) Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic behavior of discrete estimators for drift parameters in the Cox-Ingersoll-Ross model // Матеріали XXII Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2024». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2024. С. 45–46.
7) Prykhodko O., Ralchenko K. Strong consistency of discrete estimators for drift parameters in the Cox-Ingersoll-Ross model // XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, Київ, 9-11 травня 2024 р. : [збірник тез /оргком.: Глибовець А. М. та ін.]. Київ, Україна : "Національний університет Києво-Могилянська академія"[та ін.]. - [Київ : б. в.]. 2024. С. 41–42.
7) PrykhodkoO., Ralchenko K. Drift parameters estimation in the Cox–Ingersoll–Ross model // Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2024» : Book of abstracts. Kyiv, Ukraine : Taras Shevchenko National University of Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. 2024. P. 80.
9) PrykhodkoO., Ralchenko K. Strong consistency of drift parameter estimator in the Langevin equation driven by tempered fractional Brownian motion // Матеріали XXIII Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2025». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2025. С. 43–44.
10) Prykhodko O., Ralchenko K. Strongly consistent estimation of drift parameter in tempered fractional Ornstein-Uhlenbeck process // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. 2025. Access mode: https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2025/abstracts/Prykhodko-Ralchenko.pdf.
11) Prykhodko O., Ralchenko K. Almost sure bounds for increments of tempered fractional Brownian motion with statistical applications // XX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука: Тези доповідей. Київ, Україна : КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2025. С. 138–139.

13. Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, огляду літератури за темою дослідження, трьох розділів з власними результатами, висновків, списку використаних джерел та двох додатків (додаток А містить список наукових публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів, а додаток Б – деякі додаткові факти, використані у доведеннях). Загальний обсяг роботи становить 122 сторінки, з яких основний текст викладено на 92 сторінках. Список використаних джерел містить 119 найменувань.

14. Характеристика особистості здобувача. Приходько Ольга Дмитрівна народилася 4 квітня 1990 року. У 2007 році закінчила Малинський загальноосвітній навчально-виховний комплекс «Школа-ліцей № 1 імені Ніни Сосніної» І-ІІІ ступенів Житомирської області і нагороджена золотою медаллю «За високі досягнення у навчанні». У 2013 році закінчила Київський національний університет імені Тараса Шевченка і отримала повну вищу освіту за спеціальністю «Прикладна та теоретична статистика». З 2022 року є аспіранткою кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

15. Оцінка мови та стилю дисертації. Дисертація виконана фаховою українською мовою, текстове подання матеріалу відповідає стилю науково-дослідної літератури.

16. Рецензенти рекомендують: відповідно до **пп. 15, 16** Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. № 44, ***пропонується такий склад разової ради:***

Голова ради:

Майборода Ростислав Євгенович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Рецензенти:

Голомозий Віталій Вікторович, доктор фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

Розора Ірина Василівна, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувачка кафедри прикладної статистики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Офіційні опоненти:

Іванов Олександр Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»;

Погоруй Анатолій Олександрович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка.

Усі члени разової спеціалізованої вченої ради не мають реального чи потенційного конфлікту інтересів щодо здобувача Приходько Ольги Дмитрівни (зокрема, не є її близькою особою) та/або його наукового керівника.

У результаті попередньої експертизи дисертації **Приходько Ольги Дмитрівни** і повноти публікації основних результатів дослідження

УХВАЛЕНО:

1. Затвердити висновок про наукову новизну, теоретичне та практичне значення результатів дисертації Приходько Ольги Дмитрівни на тему: «Оцінювання параметрів в афінних дифузійних моделях з довгостроковою залежністю».

2. Констатувати, що за актуальністю, степенем наукової новизни, обґрунтованістю, науковою та практичною цінністю здобутих результатів дисертація Приходько О.Д. відповідає спеціальності 112 Статистика та вимогам **Порядку підготовки здобувачів вищої освіти ступеня доктора філософії та доктора наук у закладах вищої освіти (наукових установах),** затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 23 березня 2016 р. № 261, пп. **6, 7, 8 Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії,** затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. № 44.

3. Рекомендувати дисертацію Приходько О.Д. на тему: «Оцінювання параметрів в афінних дифузійних моделях з довгостроковою залежністю» до захисту на здобуття ступеня доктора філософії у разовій спеціалізованій вченій раді за спеціальністю 112 Статистика.

4. Рекомендувати вченій раді механіко-математичного факультету затвердити склад разової спеціалізованої вченої ради:

Голова ради:

Майборода Ростислав Євгенович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Рецензенти:

Голомозий Віталій Вікторович, доктор фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

Розора Ірина Василівна, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувачка кафедри прикладної статистики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Офіційні опоненти:

Іванов Олександр Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»;

Погоруй Анатолій Олександрович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка.

Результати голосування щодо рекомендації до захисту дисертації Приходько Ольги Дмитрівни:

«За» – 13

«Проти» – немає

«Утримались» – немає

Презентація Приходько Ольги Дмитрівни на 50 стор. додається.

Виконуючий обов'язки декана
механіко-математичного факультету –
кандидат фізико-математичних наук, доцент **Олексій ХАРИТОНОВ**

Головуючий на засіданні –
доктор фізико-математичних наук, доцент,
завідувач кафедри теорії ймовірностей,
статистики та актуарної математики
механіко-математичного факультету **Ростислав ЯМНЕНКО**

Секретар засідання **Олександр БОРИСЕНКО**

Оцінювання параметрів в афінних дифузійних моделях з довгостроковою залежністю

ЗА МАТЕРІАЛАМИ ДИСЕРТАЦІЇ НА ЗДОБУТТЯ СТУПЕНЯ ДОКТОРА ФІЛОСОФІЇ
зі спеціальності 112 – Статистика

Приходько Ольга Дмитрівна

Механіко-математичний факультет
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, доцент
Ральченко Костянтин Володимирович

12 березня, 2026

Актуальність теми

Актуальність дослідження зумовлена поєднанням кількох чинників:

- широкою прикладною значущістю афінних дифузійних моделей,
- обмеженістю класичних методів оцінювання у випадку дискретних спостережень і стандартного броунівського шуму,
- необхідністю врахування довгострокової залежності в сучасних стохастичних моделях.

Розробка та обґрунтування статистичних методів оцінювання параметрів у таких умовах є важливим кроком як для подальшого розвитку теорії та статистики випадкових процесів, так і для розв'язання актуальних прикладних задач фінансової та економічної статистики.

Мета та завдання дослідження

Мета: розробити та теоретично обґрунтувати статистичні методи оцінювання параметрів афінних дифузійних моделей, що задаються стохастичними диференціальними рівняннями, за умов неперервних і дискретних спостережень, встановити асимптотичні властивості побудованих оцінок, зокрема строгу конзистентність та асимптотичну нормальность.

Завдання: побудувати оцінки всіх параметрів моделі Васічека за дискретними спостереженнями та встановити їх строгу конзистентність і асимптотичну нормальність; розробити методи оцінювання параметрів зсуву моделі Кокса – Інгерсолла – Росса на основі неперервних і дискретних спостережень, дослідити асимптотичні властивості відповідних оцінок – строгу конзистентність та асимптотичну нормальність; дослідити задачу оцінювання параметрів неергодичної моделі Орнштейна – Уленбека, керованої темперованими дробовими броунівськими процесами, отримати оцінки зверху для приростів керуючих процесів, побудувати оцінки параметра зсуву в неперервному і дискретному випадках та обґрунтувати їх строгу конзистентність; розробити методи моделювання темперованого дробового броунівського руху та темперованого дробового броунівського руху другого роду; провести чисельну перевірку отриманих теоретичних результатів.

Об'єкт, предмет та методи дослідження

Об'єктом дослідження є афінні дифузійні моделі, що задаються стохастичними диференціальними рівняннями, зокрема

- модель Васічека,
- модель Кокса – Інгерсолла – Росса та
- модель Орнштейна – Уленбека, керована вінерівським процесом або темперованими дробовими броунівськими процесами.

Предметом дослідження є статистичні методи оцінювання параметрів афінних дифузійних моделей за неперервними та дискретними спостереженнями, а також асимптотичні властивості відповідних оцінок.

Методи дослідження. Для отримання теоретичних результатів використано методи математичного аналізу, теорії ймовірностей, математичної статистики та теорії випадкових процесів, зокрема методи асимптотичного аналізу стохастичних інтегралів і мартингальні метод. Моделювання даних виконано засобами мови програмування R.

Структура дисертації

Дисертація складається зі

- вступу,
- огляду літератури за темою дослідження,
- трьох розділів з власними результатами,
- висновку,
- списку використаних джерел та
- двох додатків (додаток А містить список наукових публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів, а додаток Б — деякі додаткові факти, використані у доведеннях).

Загальний обсяг роботи становить **121** сторінку, з яких основний текст викладено на **92** сторінках. Список використаних джерел містить **119** найменувань.

Вступ

- Актуальність теми
- Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами
- Мета та завдання дослідження
- Об'єкт дослідження
- Предмет дослідження
- Методи дослідження
- Наукова новизна одержаних результатів
- Практичне значення одержаних результатів
- Особистий внесок здобувача
- Апробація результатів дисертації
- Публікації
- Структура та обсяг дисертації
- Короткий зміст роботи

Розділ 2. Оцінювання всіх параметрів моделі Васічека за дискретними спостереженнями

2.1. Постановка задачі
2.2. Збіжність статистик
2.3. Побудова оцінок
2.4. Асимптотична нормальність оцінок
2.5. Моделювання
2.6. Висновки

Модель Васічека

У **розділі 2** розглядається така модель:

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)\, dt + \gamma dW_t,$$

де α, β, γ – це константи, а W – вінерівський процес.

Значення параметрів тут відповідають за такі моменти:

1) β визначає швидкість повернення до середнього;

2) частка α/β це довгострокове середнє значення відсоткової ставки;

3) γ позначає стохастичну волатильність.

Статистики за дискретними спостереженнями та їх збіжності

Розглянемо спостереження $X_0, X_h, X_{2h}, \ldots, X_{nh}$ для фіксованого додатного кроку h.

Та визначимо наступні статистики від даних спостережень:

$$\xi_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_{kh}, \qquad \eta_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_{kh}^2, \qquad \zeta_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_{kh}X_{(k+1)h}.$$

Лема

Наступні збіжності виконуються м.н. при $n \to \infty$*:*

$$\xi_n \to \frac{\alpha}{\beta},\ \eta_n \to \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{2\beta},\ \zeta_n \to \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{2\beta}e^{-\beta h}. \tag{1}$$

Оцінки за дискретними спостереженнями та їх конзистентність

Зі збіжностей з попередньої леми отримуємо:

$$\hat{\beta}_n = \frac{1}{h} \ln^+ \frac{\eta_n - \xi_n^2}{\zeta_n - \xi_n^2}, \qquad \hat{\alpha}_n = \xi_n \hat{\beta}_n, \qquad \hat{\gamma}_n^2 = 2\hat{\beta}_n \left(\eta_n - \xi_n^2\right),$$

де $\ln^+ x = \ln \max\{x, 1\}$.

Теорема

Наступні збіжності виконуються м.н. при $n \to \infty$:

$$\hat{\alpha}_n \to \alpha, \qquad \hat{\beta}_n \to \beta, \qquad \hat{\gamma}_n \to \gamma,$$

тобто $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$, $\hat{\gamma}_n$ є строго конзистентними оцінками параметрів α, β, γ відповідно.

Властивості статистик ξ_n, η_n, ζ_n

Лема

Наступні збіжності виконуються при $n \to \infty$*:*

$$n\mathsf{Var}\xi_n \to \frac{\gamma^2}{2\beta} \cdot \frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}},$$

$$n\mathsf{Var}\eta_n \to \frac{2\alpha^2\gamma^2}{\beta^3} \cdot \frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}} + \frac{\gamma^4}{2\beta^2} \cdot \frac{1+e^{-2\beta h}}{1-e^{-2\beta h}},$$

$$n\mathsf{Var}\zeta_n \to \frac{2\alpha^2\gamma^2}{\beta^3} \cdot \frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}} + \frac{\gamma^4}{4\beta^2} \cdot \frac{1+4e^{-2\beta h}-e^{-4\beta h}}{1-e^{-2\beta h}},$$

$$n\mathsf{cov}(\xi_n, \eta_n) \to \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2} \cdot \frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}},$$

$$n\mathsf{cov}(\xi_n, \zeta_n) \to \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2} \cdot \frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}},$$

$$n\mathsf{cov}(\eta_n, \zeta_n) \to \frac{2\alpha^2\gamma^2}{\beta^3} \cdot \frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}} + \frac{\gamma^4}{\beta^2} \cdot \frac{e^{-\beta h}}{1-e^{-2\beta h}}.$$

Властивості статистик ξ_n, η_n, ζ_n

Теорема

Наступні збіжності за розподілом виконуються при $n \to \infty$*:*

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \xi_n - E\xi_n \\ \eta_n - E\eta_n \\ \zeta_n - E\zeta_n \end{pmatrix} \to \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma),$$

де асимптотична коваріаційна матриця Σ *дорівнює*

$$\frac{\gamma^2}{2\beta}\cdot\frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{2\alpha}{\beta} & \frac{2\alpha}{\beta} \\ \frac{2\alpha}{\beta} & \frac{4\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\gamma^2}{\beta}\cdot\frac{1+e^{-2\beta h}}{(1+e^{-\beta h})^2} & \frac{4\alpha^2}{\beta^2}+\frac{2\gamma^2}{\beta}\cdot\frac{e^{-\beta h}}{(1+e^{-\beta h})^2} \\ \frac{2\alpha}{\beta} & \frac{4\alpha^2}{\beta^2}+\frac{2\gamma^2}{\beta}\cdot\frac{e^{-\beta h}}{(1+e^{-\beta h})^2} & \frac{4\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\gamma^2}{2\beta}\cdot\frac{1+4e^{-2\beta h}-e^{-4\beta h}}{(1+e^{-\beta h})^2} \end{pmatrix}$$

Асимптотична нормальність оцінок за дискретними спостереженнями

Теорема

Оцінки $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$, $\hat{\gamma}_n$ є асимптотично нормальними, тобто

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\alpha}_n-\alpha\\ \hat{\beta}_n-\beta\\ \hat{\gamma}_n-\gamma\end{pmatrix}\to\mathcal{N}(\mathbf{0},\Gamma)$$

де елементи коваріаційної матриці $\Gamma=(\Gamma_{ij})_{i,j=1,2,3}$ мають такий вигляд:

$$\Gamma_{11}=\frac{\alpha^2}{h^2\beta^2}\left(e^{2\beta h}-1\right)+\frac{\beta\gamma^2}{2}\frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}},\quad \Gamma_{12}=\Gamma_{21}=\frac{\alpha}{h^2\beta}\left(e^{2\beta h}-1\right),$$

$$\Gamma_{13}=\Gamma_{31}=\frac{\alpha\gamma}{2h^2\beta^2}\left(e^{2\beta h}-1\right)-\frac{\alpha\gamma}{h\beta},\quad \Gamma_{22}=\frac{1}{h^2}\left(e^{2\beta h}-1\right),$$

$$\Gamma_{23}=\Gamma_{32}=\frac{\gamma}{2h^2\beta}(e^{2\beta h}-1)-\frac{\gamma}{h},\quad \Gamma_{33}=\frac{\gamma^2}{4h^2\beta^2}\left(e^{2\beta h}-1\right)-\frac{\gamma^2}{h\beta}+\frac{\gamma^2}{2}\frac{e^{2\beta h}+1}{e^{2\beta h}-1}.$$

Моделювання значень моделі Васічека

Мова програмування: R.

Рівняння: $X_t = \frac{\alpha}{\beta} + e^{-\beta t}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \gamma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dW_s$.

Початкове значення: $x_0 = 1$.

Значення параметрів (α, β, γ)**:** розглянуто 10 таких наборів $(\pm 2, 1, 1)$, $(\pm 1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(\pm 1, 1, 2)$, $(\pm 1, 2, 1)$.

Кількість траєкторій: 1000.

Оцінки:

$$\hat{\beta}_n = \frac{1}{h} \ln^+ \frac{\eta_n - \xi_n^2}{\zeta_n - \xi_n^2}, \qquad \hat{\alpha}_n = \xi_n \hat{\beta}_n, \qquad \hat{\gamma}_n^2 = 2\hat{\beta}_n \left(\eta_n - \xi_n^2\right),$$

де $\ln^+ x = \ln \max\{x, 1\}$.

Крок: $h = 0.1$ та $h = 1$.

Обсяг вибірок: $n = 100, 500, 1000, 1500$ і 2000.

Різниці середніх оцінок та істинних значень параметрів для $h = 1$

	$\alpha = 2$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = -2$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = -1$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$	$\alpha = -1$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$	$\alpha = 1$ $\beta = 2$ $\gamma = 1$	$\alpha = -1$ $\beta = 2$ $\gamma = 1$
					$\mu(\hat{\alpha}_n) - \alpha$					
$n = 100$	−0.0345	0.4023	0.0195	0.1247	0.0422	0.0206	0.1229	−0.0436	−0.0133	0.0768
$n = 500$	0.0105	0.0837	0.0040	0.0293	0.0019	0.0047	0.0299	−0.0143	0.0705	−0.0235
$n = 1000$	0.0053	0.0396	0.0014	0.0144	−0.0007	0.0012	0.0143	−0.0092	0.0355	−0.0159
$n = 1500$	0.0049	0.0257	0.0009	0.0102	−0.0010	0.0008	0.0101	−0.0067	0.0235	−0.0111
$n = 2000$	0.0045	0.0177	0.0007	0.0082	−0.0015	0.0006	0.0081	−0.0057	0.0181	−0.0092
					$\mu(\hat{\beta}_n) - \beta$					
$n = 100$	−0.0095	−0.1806	0.1147	0.1233	−0.0086	0.1176	0.1204	0.0814	−0.0582	−0.0788
$n = 500$	0.0065	−0.0369	0.0280	0.0286	0.0052	0.0282	0.0284	0.0222	0.1340	0.0631
$n = 1000$	0.0035	−0.0176	0.0147	0.0146	0.0037	0.0147	0.0147	0.0120	0.0697	0.0377
$n = 1500$	0.0031	−0.0114	0.0103	0.0104	0.0030	0.0104	0.0104	0.0085	0.0466	0.0258
$n = 2000$	0.0027	−0.0077	0.0084	0.0083	0.0030	0.0084	0.0083	0.0070	0.0359	0.0210
					$\mu(\hat{\gamma}_n) - \gamma$					
$n = 100$	−0.0263	−0.0310	0.0333	0.0231	0.0105	0.0501	0.0452	0.0367	−0.1054	−0.0367
$n = 500$	−0.0002	−0.0038	0.0105	0.0084	0.0062	0.0176	0.0166	0.0153	0.0260	0.0182
$n = 1000$	0.0002	−0.0012	0.0058	0.0046	0.0038	0.0098	0.0092	0.0089	0.0153	0.0116
$n = 1500$	0.0003	−0.0008	0.0039	0.0031	0.0026	0.0067	0.0063	0.0060	0.0101	0.0077
$n = 2000$	0.0008	0.0002	0.0036	0.0030	0.0027	0.0064	0.0061	0.0060	0.0084	0.0067

Стандартні відхилення $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$ і $\hat{\gamma}_n$ помножені на $\sqrt{n}$ для $h = 1$

	$\alpha = 2$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = -2$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = -1$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$	$\alpha = -1$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$	$\alpha = 1$ $\beta = 2$ $\gamma = 1$	$\alpha = -1$ $\beta = 2$ $\gamma = 1$
					$\sqrt{n} \cdot SD(\hat{\alpha}_n)$					
$n = 100$	5.8228	3.9277	1.1667	3.9555	2.6991	2.3449	4.1574	3.8003	5.8683	4.5669
$n = 500$	5.1407	4.8430	1.0720	2.7714	2.7431	2.1449	3.2956	3.4091	5.1944	4.5515
$n = 1000$	5.1082	4.9850	1.0811	2.7262	2.7520	2.1625	3.2682	3.3933	4.2009	4.1434
$n = 1500$	5.1460	5.1018	1.1016	2.7397	2.7936	2.2036	3.2960	3.4413	4.0926	4.1230
$n = 2000$	5.1505	5.1112	1.0676	2.7345	2.7697	2.1354	3.2709	3.3722	3.9800	4.0037
теоретичне	5.1612	5.1612	1.0402	2.7333	2.7333	2.0804	3.2737	3.2737	3.8357	3.8357
					$\sqrt{n} \cdot SD(\hat{\beta}_n)$					
$n = 100$	2.9290	1.9775	3.2694	3.7750	2.5836	3.3643	3.5231	3.0861	11.0787	9.2134
$n = 500$	2.5437	2.3569	2.5905	2.6054	2.5019	2.5999	2.6043	2.5762	9.9961	8.8115
$n = 1000$	2.5228	2.4201	2.5418	2.5507	2.4968	2.5454	2.5484	2.5332	8.1480	7.8215
$n = 1500$	2.5449	2.4758	2.5590	2.5644	2.5288	2.5605	2.5623	2.5525	7.9498	7.7625
$n = 2000$	2.5410	2.4889	2.5518	2.5558	2.5291	2.5527	2.5539	2.5467	7.6932	7.5753
теоретичне	2.5277	2.5277	2.5277	2.5277	2.5277	2.5277	2.5277	2.5277	7.3211	7.3211
					$\sqrt{n} \cdot SD(\hat{\gamma}_n)$					
$n = 100$	1.2962	1.1134	1.2762	1.3656	1.1791	2.5811	2.6371	2.4997	3.9961	3.0867
$n = 500$	1.1265	1.1071	1.1246	1.1279	1.1170	2.2527	2.2538	2.2493	2.4841	2.2506
$n = 1000$	1.1103	1.0969	1.1076	1.1100	1.1030	2.2162	2.2176	2.2137	1.9405	1.8938
$n = 1500$	1.1145	1.1109	1.1159	1.1161	1.1141	2.2317	2.2312	2.2314	1.9213	1.8957
$n = 2000$	1.0912	1.0825	1.0891	1.0907	1.0863	2.1781	2.1792	2.1764	1.8603	1.8419
теоретичне	1.1197	1.1197	1.1197	1.1197	1.1197	2.2394	2.2394	2.2394	1.8354	1.8354

Різниці середніх оцінок та істинних значень параметрів для $h = 0.1$

	$\alpha = 2$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = -2$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = -1$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$	$\alpha = -1$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$	$\alpha = 1$ $\beta = 2$ $\gamma = 1$	$\alpha = -1$ $\beta = 2$ $\gamma = 1$
					$\mu(\hat{\alpha}_n) - \alpha$					
$n = 100$	−0.2917	1.2133	0.2021	0.5248	0.2584	0.2221	0.5346	0.0355	0.4338	0.1481
$n = 500$	0.0106	0.3567	0.0276	0.1134	0.0377	0.0309	0.1159	−0.0270	0.0880	0.0174
$n = 1000$	−0.0005	0.1862	0.0118	0.0517	0.0169	0.0123	0.0524	−0.0161	0.0410	0.0071
$n = 1500$	0.0006	0.1290	0.0080	0.0343	0.0122	0.0086	0.0348	−0.0096	0.0277	0.0051
$n = 2000$	0.0026	0.0943	0.0060	0.0269	0.0075	0.0066	0.0276	−0.0087	0.0219	0.0026
					$\mu(\hat{\beta}_n) - \beta$					
$n = 100$	−0.0845	−0.5158	0.4988	0.5225	−0.0010	0.5071	0.5158	0.3373	0.6837	0.1027
$n = 500$	0.0151	−0.1491	0.1060	0.1103	0.0098	0.1077	0.1095	0.0811	0.1463	0.0395
$n = 1000$	0.0051	−0.0779	0.0510	0.0514	0.0053	0.0515	0.0516	0.0396	0.0702	0.0201
$n = 1500$	0.0036	−0.0540	0.0332	0.0337	0.0028	0.0334	0.0337	0.0256	0.0470	0.0133
$n = 2000$	0.0037	−0.0392	0.0262	0.0264	0.0037	0.0264	0.0265	0.0207	0.0372	0.0124
					$\mu(\hat{\gamma}_n) - \gamma$					
$n = 100$	−0.2197	−0.2147	0.0433	−0.0135	−0.0196	0.0038	−0.0238	−0.0314	0.0475	0.0426
$n = 500$	−0.0336	−0.0360	0.0104	0.0000	−0.0017	0.0043	−0.0005	−0.0022	0.0118	0.0109
$n = 1000$	−0.0174	−0.0167	0.0053	−0.0004	−0.0002	0.0024	−0.0005	−0.0003	0.0058	0.0058
$n = 1500$	−0.0113	−0.0116	0.0034	−0.0002	−0.0004	0.0013	−0.0005	−0.0007	0.0039	0.0037
$n = 2000$	−0.0082	−0.0079	0.0030	0.0002	0.0003	0.0019	0.0005	0.0006	0.0034	0.0034

Стандартні відхилення $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$ і $\hat{\gamma}_n$ помножені на $\sqrt{n}$ для $h = 0.1$

	$\alpha=2$ $\beta=1$ $\gamma=1$	$\alpha=-2$ $\beta=1$ $\gamma=1$	$\alpha=0$ $\beta=1$ $\gamma=1$	$\alpha=1$ $\beta=1$ $\gamma=1$	$\alpha=-1$ $\beta=1$ $\gamma=1$	$\alpha=0$ $\beta=1$ $\gamma=2$	$\alpha=1$ $\beta=1$ $\gamma=2$	$\alpha=-1$ $\beta=1$ $\gamma=2$	$\alpha=1$ $\beta=2$ $\gamma=1$	$\alpha=-1$ $\beta=2$ $\gamma=1$
					$\sqrt{n} \cdot SD(\hat{\alpha}_n)$					
$n=100$	10.0592	4.4663	4.8731	8.2769	3.8205	9.4541	11.3913	8.6162	6.7433	3.8821
$n=500$	10.2820	7.6736	3.6482	6.3630	5.2565	7.3088	8.9465	8.4164	5.1292	4.6376
$n=1000$	9.9656	8.7330	3.3952	6.0178	5.4642	6.7916	8.4371	8.1022	4.9788	4.6907
$n=1500$	9.7299	9.1073	3.4326	5.8580	5.5743	6.8669	8.3466	8.2065	4.8954	4.8094
$n=2000$	9.8504	9.2994	3.3134	5.7929	5.6010	6.6286	8.1361	8.0841	4.8266	4.7729
теоретичне	9.9282	9.9282	3.1636	5.6700	5.6700	6.3272	7.8850	7.8850	4.7254	4.7254
					$\sqrt{n} \cdot SD(\hat{\beta}_n)$					
$n=100$	5.4751	2.8848	6.6041	7.1163	4.5594	6.6980	6.8164	6.0409	9.3060	6.7495
$n=500$	4.9930	3.8600	5.0623	5.2408	4.5379	5.1317	5.1945	4.9682	7.4403	6.8754
$n=1000$	4.7646	4.2949	4.9172	4.9466	4.6820	4.9365	4.9373	4.8815	7.2670	7.0136
$n=1500$	4.6286	4.3985	4.7712	4.7660	4.6420	4.7743	4.7626	4.7515	7.1032	6.9843
$n=2000$	4.7016	4.4592	4.7760	4.7893	4.6617	4.7782	4.7782	4.7526	7.1405	7.0185
теоретичне	4.7053	4.7053	4.7053	4.7053	4.7053	4.7053	4.7053	4.7053	7.0130	7.0130
					$\sqrt{n} \cdot SD(\hat{\gamma}_n)$					
$n=100$	2.4182	2.4043	0.8665	1.2885	1.2578	1.8018	2.0088	2.0290	0.8969	0.8712
$n=500$	1.0845	1.0905	0.7806	0.8607	0.8659	1.5731	1.6119	1.6201	0.8093	0.8077
$n=1000$	0.8992	0.9340	0.7575	0.7889	0.8095	1.5204	1.5303	1.5532	0.7927	0.7965
$n=1500$	0.8462	0.8770	0.7483	0.7690	0.7865	1.4996	1.5051	1.5239	0.7840	0.7904
$n=2000$	0.8277	0.8440	0.7518	0.7689	0.7779	1.5064	1.5125	1.5222	0.7817	0.7852
теоретичне	0.7428	0.7428	0.7428	0.7428	0.7428	1.4856	1.4856	1.4856	0.7792	0.7792

Розділ 3. Оцінювання параметрів зсуву в моделі Кокса – Інгерсолла – Росса

3.1. Постановка задачі

3.2. Неперервна оцінка

3.2.1. Асимптотична поведінка інтегралів

3.2.2. Асимптотична нормальність оцінки за неперервними спостереженнями

3.3. Дискретна оцінка

3.3.1. Наближення інтегралів сумами. Асимптотична поведінка сум

3.3.2. Строга конзистентність та асимптотична нормальність оцінки за дискретними спостереженнями

3.4. Моделювання

3.5. Висновки

Модель Кокса – Інгерсолла – Росса

Розглядається модель, яка задана наступним стохастичним диференціальним рівнянням:

$$r_t = r_0 + \int_0^t (a - br_s)\, ds + \int_0^t \sigma\sqrt{r_s}\, dW_s, \tag{2}$$

де $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — вінерівський процес, а константи a, b та σ є додатними.

Параметри моделі мають таку інтерпретацію:

r_t — миттєва відсоткова ставка,

b — параметр, що характеризує швидкість повернення до середнього значення a/b,

σ — стандартне відхилення відсоткової ставки (волатильність).

Оцінювання параметрів зсуву для неперервних спостережень

Для рівняння (2) розглядатимемо такі оцінки параметрів зсуву:

$$\widetilde{a}_T = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\left(\int_0^T r_t dt\right)^2}{T\int_0^T r_t^2 dt - \left(\int_0^T r_t dt\right)^2}, \widetilde{b}_T = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{T\int_0^T r_t dt}{T\int_0^T r_t^2 dt - \left(\int_0^T r_t dt\right)^2}.$$

Дані оцінки були розглянуті у статті

Dehtiar, O., Y.Mishura, and K. Ralchenko. 2022. Two methods of estimation of the drift parameters of the Cox-Ingersoll-Ross process: continuous observations. Communications in Statistics - Theory and Methods.

Властивості інтегралів від розв'язків

Лема

Нехай $q \geq 1$. *Для будь-яких значень* $T > 0$

$$(i)\ T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t dt = \frac{a}{b} T^{\frac{1}{2}} + \frac{\sigma}{b} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^{1/2}\, dW_t + \rho_1(T),$$

$$(ii)\ T^{-\frac{3}{2}} \left(\int_0^T r_t dt \right)^2 = \frac{a^2}{b^2} T^{\frac{1}{2}} + \frac{2a\sigma}{b^2} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^{1/2}\, dW_t + \rho_2(T),$$

$$(iii)\ T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^2 dt = \frac{a(a+\sigma^2/2)}{b^2}\, T^{\frac{1}{2}} + \frac{\sigma(a+\sigma^2/2)}{b^2} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^{1/2}\, dW_t + \frac{\sigma}{b} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^{3/2}\, dW_t + \rho_3(T),$$

де

$$\rho_i(T) \xrightarrow{L_q} 0 \quad \textit{при } T \to \infty, \quad i = 1, 2, 3.$$

Властивості інтегралів від розв'язків

Лема

Для будь-яких значень $q \geq 1$ існує константа $C = C_q > 0$ така, що

$$\mathbf{E}\left|\frac{1}{T}\int_0^T r_s^2\,ds - \frac{a(a+\sigma^2/2)}{b^2}\right|^q \leq CT^{-\frac{q}{2}}.$$

Лема

(i) Для інтеграла $\int_0^T r_t^3 dt$ справедлива наступна рівність:

$$\frac{1}{T}\int_0^T r_t^3 dt = \frac{a\left(a+\sigma^2\right)\left(a+\sigma^2/2\right)}{b^3} + \frac{r_0^3 - r_T^3}{3bT} + \frac{a+\sigma^2}{b}\left(\frac{1}{T}\int_0^T r_t^2 dt - \frac{a(a+\sigma^2/2)}{b^2}\right) + \frac{\sigma}{bT}\int_0^T r_t^{\frac{5}{2}}\,dW_t.$$

(ii) До того ж, для будь-яких значень $q \geq 1$ існує константа $C = C_q > 0$ така, що

$$\mathbf{E}\left|\frac{1}{T}\int_0^T r_t^3\,dt - \frac{a\left(a+\sigma^2\right)\left(a+\sigma^2/2\right)}{b^3}\right|^q \leq CT^{-\frac{q}{2}}.$$

Властивості інтегралів від розв'язків

Лема

При $T \to \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \begin{pmatrix} \int_0^T r_t^{1/2} dW_t \\ -\int_0^T r_t^{3/2} dW_t \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Gamma),$$

де

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & -\frac{a}{b^2}\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\ -\frac{a}{b^2}\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right) & \frac{a}{b^3}\left(a + \sigma^2\right)\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Асимптотична нормальність оцінок за неперервними спостереженнями

Теорема

Оцінка $(\tilde{a}_T, \tilde{b}_T)$ *є асимптотично нормальною:*

$$\sqrt{T}\begin{pmatrix}\tilde{a}_T - a\\ \tilde{b}_T - b\end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma), \quad \text{при } T \to \infty,$$

де

$$\Sigma = \begin{pmatrix}\frac{a}{b}\left(2a+\sigma^2\right) & 2a+\sigma^2\\ 2a+\sigma^2 & \frac{2b}{a}\left(a+\sigma^2\right)\end{pmatrix}.$$

Зауваження (Порівняння з оцінкою максимальної вірогідності)

Коваріаційна матриця ОМВ має такий вигляд:

$$\Sigma_{\text{mle}} = \begin{pmatrix}\frac{a}{b}\left(2a-\sigma^2\right) & 2a-\sigma^2\\ 2a-\sigma^2 & 2b\end{pmatrix}.$$

Побудова оцінки за дискретними спостереженнями

Схема спостережень. Розглядаємо відрізок $[0, n]$, де $n \in \mathbb{N}$. Беремо крок $\delta_n = n^{-\beta}$, $\beta > 0$. Позначимо кількість спостережень як $m_n = n^{\beta+1}$ та моменти спостережень як $t_k = \frac{k}{n^\beta}, k = 0, ..., m_n - 1$.

Неперервна оцінка $(\widetilde{a}_T, \widetilde{b}_T)$

$$\widetilde{a}_T = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\left(\int_0^T r_t dt\right)^2}{T\int_0^T r_t^2 dt - \left(\int_0^T r_t dt\right)^2}$$

$$\widetilde{b}_T = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{T\int_0^T r_t dt}{T\int_0^T r_t^2 dt - \left(\int_0^T r_t dt\right)^2}$$

Дискретна оцінка $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$

$$\hat{a}_n = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\right)^2}{m_n \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2 - \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\right)^2},$$

$$\hat{b}_n = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{m_n \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}}{m_n \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2 - \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\right)^2}$$

Допоміжні результати

Лема

Має місце наступна збіжність:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2 \delta_n \to \frac{a(a+\sigma^2/2)}{b^2} \quad \text{м.н., при } n \to \infty.$$

Лема

Нехай $\beta > 1$. *Тоді*

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k} \delta_n = n^{-\frac{1}{2}} \int_0^n r_t dt + \tau_1(n),$$

$$n^{-\frac{3}{2}} \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k} \delta_n \right)^2 = n^{-\frac{3}{2}} \left(\int_0^n r_t dt \right)^2 + \tau_2(n),$$

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2 \delta_n = n^{-\frac{1}{2}} \int_0^n r_t^2 dt + \tau_3(n),$$

де

$$\tau_i(n) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{при } n \to \infty, \quad i = 1, 2, 3.$$

Властивості оцінки $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$

Теорема

1. Для будь-яких значень $\beta > 0$,

$$\hat{a}_n \to a, \quad \hat{b}_n \to b, \quad \text{м.н. при } n \to \infty,$$

тобто $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ *є строго конзистентною оцінкою для параметра* (a, b).

2. Нехай $\beta > 1$. *Тоді оцінка* $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ *є асимптотично нормальною:*

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{a}_n - a \\ \hat{b}_n - b \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma), \quad \text{при } n \to \infty,$$

де

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{a}{b}\left(2a + \sigma^2\right) & 2a + \sigma^2 \\ 2a + \sigma^2 & \frac{2b}{a}\left(a + \sigma^2\right) \end{pmatrix}.$$

.

Моделювання значень процесу Кокса – Інгерсолла – Росса

Мова програмування: R.

Рівняння: $r_t = r_0 + \int_0^t (a - br_s)\,ds + \int_0^t \sigma\sqrt{r_s}\,dW_s$.

Початкове значення: $r_0 = 1$.

Значення параметрів: 12 наборів $(a, b, \sigma) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$.

Кількість траєкторій: 1000.

Оцінка: $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ для дискретних спостережень, де

$$\hat{a}_n = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\right)^2}{m_n \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2 - \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\right)^2}, \quad \hat{b}_n = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{m_n \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}}{m_n \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2 - \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\right)^2}.$$

Значення β: 1.5.

Горизонти спостережень: $n = 2^4, 2^6, 2^8$.

Крок: $\delta_n = 2^{-6}, 2^{-9}, 2^{-12}$.

Кількість точок: $m_n = 2^{10}, 2^{15}, 2^{20}$.

Різниці середніх оцінок $\hat{a}_n$ і $\hat{b}_n$ та істинних значень параметрів

	$\mu(\hat{a}_n) - a$				$\mu(\hat{b}_n) - b$			
	$a=1$ $b=1$	$a=1$ $b=2$	$a=2$ $b=1$	$a=2$ $b=2$	$a=1$ $b=1$	$a=1$ $b=2$	$a=2$ $b=1$	$a=2$ $b=2$
				$\sigma = 1$				
$n = 2^4$	0.3679	0.1924	0.5203	0.3644	0.4219	0.3593	0.3298	0.3908
$n = 2^6$	0.1087	0.0569	0.1596	0.1005	0.1286	0.1175	0.0990	0.1116
$n = 2^8$	0.0254	0.0121	0.0365	0.0211	0.0301	0.0249	0.0226	0.0235
				$\sigma = 2$				
$n = 2^4$	0.4927	0.3115	0.7356	0.4717	0.7497	0.7945	0.5377	0.5981
$n = 2^6$	0.1670	0.1008	0.2412	0.1442	0.2438	0.2635	0.1686	0.1843
$n = 2^8$	0.0450	0.0247	0.0596	0.0320	0.0623	0.0627	0.0407	0.0409
				$\sigma = 3$				
$n = 2^4$	0.6350	0.4189	0.9386	0.6109	1.2819	1.3760	0.8269	0.9225
$n = 2^6$	0.2322	0.1424	0.3320	0.2014	0.4110	0.4447	0.2632	0.2928
$n = 2^8$	0.0709	0.0415	0.0912	0.0503	0.1107	0.1161	0.0673	0.0697

Емпіричні та теоретичні стандартні відхилення оцінки $\hat{a}_n$

	$a=1$ $b=1$		$a=1$ $b=2$		$a=2$ $b=1$		$a=2$ $b=2$	
	емп	теор	емп	теор	емп	теор	емп	теор
				$\sigma=1$				
$n=2^4$	0.4427	0.4330	0.2916	0.3062	0.7988	0.7906	0.5696	0.5590
$n=2^6$	0.2039	0.2165	0.1461	0.1531	0.3819	0.3953	0.2740	0.2795
$n=2^8$	0.1047	0.1083	0.0763	0.0765	0.1937	0.1976	0.1410	0.1398
				$\sigma=2$				
$n=2^4$	0.4965	0.6124	0.3445	0.4330	0.8797	1.0000	0.6232	0.7071
$n=2^6$	0.2481	0.3062	0.1856	0.2165	0.4375	0.5000	0.3239	0.3536
$n=2^8$	0.1384	0.1531	0.1028	0.1083	0.2358	0.2500	0.1732	0.1768
				$\sigma=3$				
$n=2^4$	0.5780	0.8292	0.3947	0.5863	0.9795	1.2748	0.6907	0.9014
$n=2^6$	0.2909	0.4146	0.2244	0.2932	0.5047	0.6374	0.3801	0.4507
$n=2^8$	0.1728	0.2073	0.1317	0.1466	0.2846	0.3187	0.2124	0.2253

Емпіричні та теоретичні стандартні відхилення оцінки $\hat{b}_n$

	$a=1$ $b=1$		$a=1$ $b=2$		$a=2$ $b=1$		$a=2$ $b=2$	
	емп	теор	емп	теор	емп	теор	емп	теор
				$\sigma=1$				
$n=2^4$	0.5152	0.5000	0.6408	0.7071	0.4608	0.4330	0.6230	0.6124
$n=2^6$	0.2455	0.2500	0.3422	0.3536	0.2173	0.2165	0.3057	0.3062
$n=2^8$	0.1245	0.1250	0.1807	0.1768	0.1084	0.1083	0.1573	0.1531
				$\sigma=2$				
$n=2^4$	0.8386	0.7906	1.0524	1.1180	0.6360	0.6124	0.8448	0.8660
$n=2^6$	0.3827	0.3953	0.5312	0.5590	0.2968	0.3062	0.4213	0.4330
$n=2^8$	0.1923	0.1976	0.2832	0.2795	0.1513	0.1531	0.2213	0.2165
				$\sigma=3$				
$n=2^4$	1.3543	1.1180	1.6015	1.5811	0.9300	0.8292	1.1789	1.1726
$n=2^6$	0.5647	0.5590	0.7581	0.7906	0.4064	0.4146	0.5631	0.5863
$n=2^8$	0.2680	0.2795	0.3944	0.3953	0.2016	0.2073	0.2969	0.2932

Розділ 4. Оцінювання параметру зсуву в темперованій моделі Орнштейна – Уленбека

4.1. Означення та деякі відомі властивості ТДБР та ТДБРІІ

4.2. Оцінки для ТДБР та ТДБРІІ та їх приростів

4.2.1. Оцінки для дисперсій темперованих ДБР та їх приростів

4.2.2. Асимптотичний ріст майже напевно приростів ТДБР та ТДБРІІ

4.3. Строго конзистентна оцінка для параметра зсуву у моделі Орнштейна – Уленбека

4.3.1. Опис статистичної моделі

4.3.2. Неперервна оцінка

4.3.3. Дискретна оцінка

4.3.3.1. Доведення теореми 4.3 у випадку ТДБР

4.3.3.2. Схема доведення теореми 4.3 у випадку ТДБРІІ

4.4. Моделювання

4.5. Висновки

Темперований дробовий броунівський рух

Для $H > 0$ і $\lambda > 0$, **темперований дробовий броунівський рух (ТДБР)** $B^I_{H,\lambda}(t)$ визначається наступним чином:

$$B^I_{H,\lambda}(t) := \int_{\mathbb{R}} \left[e^{-\lambda(t-s)_+}(t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - e^{-\lambda(-s)_+}(-s)_+^{H-\frac{1}{2}} \right] dW_s,$$

де $\{W_s, s \in \mathbb{R}\}$ – двосторонній вінерівський процес.

ТДБР був представлений у статті:

[1] Meerschaert, M.M.; Sabzikar, F. *Tempered fractional Brownian motion.* Stat. Probab. Lett. 2013, 83, 2269–2275.

Темперований дробовий броунівський рух другого роду

Для $H > 0$ і $\lambda > 0$, **темперований дробовий броунівський рух другого роду (ТДБРІІ)** $B^{II}_{H,\lambda}(t)$ визначається наступним чином:

$$B^{II}_{H,\lambda}(t) := \int_{\mathbb{R}} \left[e^{-\lambda(t-s)_+}(t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - e^{-\lambda(-s)_+}(-s)_+^{H-\frac{1}{2}} + \lambda \int_0^t (u-s)_+^{H-\frac{1}{2}} e^{-\lambda(u-s)_+}\, du \right] dW_s,$$

де $\{W_s, s \in \mathbb{R}\}$ – двосторонній вінерівський процес..

ТДБРІІ представлений у статті:

[2] Sabzikar, F.; Surgailis, D. *Tempered fractional Brownian and stable motions of second kind.* Stat. Probab. Lett. 2018, 132, 17–27.

Коваріаційна функція ТДБР та ТДБРІІ

Для **ТДБР** з параметрами $H > 0$ і $\lambda > 0$ коваріаційна функція має вигляд:

$$\operatorname{cov}\left[B^I_{H,\lambda}(t), B^I_{H,\lambda}(s)\right] = \frac{1}{2}\left[(C^I_t)^2|t|^{2H} + (C^I_s)^2|s|^{2H} - (C^I_{t-s})^2|t-s|^{2H}\right],$$

де

$$(C^I_t)^2 := \frac{2\Gamma(2H)}{(2\lambda|t|)^{2H}} - \frac{2\Gamma(H+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(2\lambda|t|)^H}K_H(\lambda|t|), \quad t > 0,$$

та $K_\nu(z)$ позначає модифіковану функцію Бесселя другого роду.

Для **ТДБРІІ** з параметрами $H > 0$ та $\lambda > 0$ коваріаційна функція має вигляд:

$$\operatorname{cov}\left[B^{II}_{H,\lambda}(t), B^{II}_{H,\lambda}(s)\right] = \frac{1}{2}\left[(C^{II}_t)^2|t|^{2H} + (C^{II}_s)^2|s|^{2H} - (C^{II}_{t-s})^2|t-s|^{2H}\right],$$

де

$$\begin{aligned}(C^{II}_t)^2 := {} & \frac{(1-2H)\Gamma(H+\frac{1}{2})\Gamma(H)}{\sqrt{\pi}(\lambda t)^{2H}} \\ & \times\left[1 - {}_2F_3\left(\left\{1, -\tfrac{1}{2}\right\}, \left\{1-H, \tfrac{1}{2}, 1\right\}, \frac{\lambda^2t^2}{4}\right)\right] \\ & + \frac{\Gamma(1-H)\Gamma(H+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}H2^{2H}}\,{}_2F_3\left(\left\{1, H-\tfrac{1}{2}\right\}, \left\{1, H+1, H+\tfrac{1}{2}\right\}, \frac{\lambda^2t^2}{4}\right),\end{aligned}$$

і ${}_2F_3$ позначає узагальнену гіпергеометричну функцію.

Відомі обмеження темперованих процесів

Для будь-яких значень $\delta > 0$ існує невід'ємна випадкова величина $\xi = \xi(\delta)$ така, що для всіх $t > 0$,

$$\sup_{s\in[0,t]} |B^{I}_{H,\lambda}(s)| \leq (t^{\delta} \vee 1)\, \xi \quad \text{м.н.},$$

та існую констенти $C_1 = C_1(\delta) > 0$, $C_2 = C_2(\delta) > 0$ такі, що для всіх $u > 0$

$$\mathrm{P}(\xi > u) \leq C_1 e^{-C_2 u^2}.$$

Для будь-яких значень $p > 1$ існує невід'ємна випадкова величина $\xi = \xi(p)$ така, що для всіх $t > 0$

$$\sup_{s\in[0,t]} |B^{II}_{H,\lambda}(s)| \leq \left(t^{\frac{1}{2}} (\ln^{+} t)^{p} \vee 1\right) \xi \quad \text{м.н.},$$

та нерівність (37) виконується для деяких констант $C_1, C_2 > 0$, які залежать від p.

Y. Mishura, K. Ralchenko "Asymptotic growth of sample paths of tempered fractional Brownian motions, with statistical applications to Vasicek-type models". Fractal and Fractional, Vol.8, Iss.2:79 - 2024

Нижня та верхня оцінки для дисперсій ТДБР і ТДБРII на інтервалі [0, 1]

Лема

Нехай $X_{H,\lambda}$ *позначає* $B^I_{H,\lambda}$ *абр* $B^{II}_{H,\lambda}$. *Для будь-яких значень* $H > 0$, $\lambda > 0$ *та* $\kappa \in (0,2)$ *існує константи* $C_1, C_2 > 0$ *такі, що для всіх значень* $t \in [0,1]$ *виконуються наступні нерівності:*

$$C_1 t^{2H} \le \mathbf{E}\Big[\big(X_{H,\lambda}(t)\big)^2\Big] \le C_2 t^{2H}, \qquad H \in (0,1),$$

$$C_1 t^{2} \le \mathbf{E}\Big[\big(X_{1,\lambda}(t)\big)^2\Big] \le C_2 t^{2-\kappa}, \qquad H = 1,$$

$$C_1 t^{2} \le \mathbf{E}\Big[\big(X_{H,\lambda}(t)\big)^2\Big] \le C_2 t^{2}, \qquad H > 1.$$

Нерівності для ТДБР і ТДБРІІ

Наслідок

Нехай $X_{H,\lambda}$ *позначає* $B^I_{H,\lambda}$ *або* $B^{II}_{H,\lambda}$ *з* $H > 0$ *та* $\lambda > 0$ *та нехай* $\kappa \in (0,1)$. *Тоді існують константи* $K_1, K_2 > 0$ *такі, що для всіх значень* $t, s \in \mathbb{R}_+$, *що задовольняють умову* $|t-s| \leq 1$, *виконуються наступні двосторонні границі:*

$$K_1 |t-s|^H \leq \left(\mathbf{E}\left[\left(X_{H,\lambda}(t) - X_{H,\lambda}(s)\right)^2\right]\right)^{1/2} \leq K_2 |t-s|^H, \qquad H \in (0,1),$$

$$K_1 |t-s| \leq \left(\mathbf{E}\left[\left(X_{H,\lambda}(t) - X_{H,\lambda}(s)\right)^2\right]\right)^{1/2} \leq K_2 |t-s|^{1-\kappa}, \quad H = 1,$$

$$K_1 |t-s| \leq \left(\mathbf{E}\left[\left(X_{H,\lambda}(t) - X_{H,\lambda}(s)\right)^2\right]\right)^{1/2} \leq K_2 |t-s|, \qquad H > 1.$$

Оцінки для приростів ТДБР і ТДБРII

Тут $X = X_{H,\lambda}$ буде позначати $B^I_{H,\lambda}$ або $B^{II}_{H,\lambda}$.

Теорема

Нехай $\beta = H \wedge 1$, *якщо* $H \neq 1$, *та нехай* $\beta \in (0,1)$ *довільне, якщо* $H = 1$. *Для будь-яких* $\delta > 0$ *і* $p > 2$, *існує невід'ємна випадкова величина* $\eta = \eta(\delta, p)$ *така, що для всіх* $0 \leq t_2 < t_1 \leq t_2 + 1$ *виконується*

$$|X_{H,\lambda}(t_1) - X_{H,\lambda}(t_2)| \leq (t_1^\delta \vee 1)(t_1 - t_2)^\beta \left(|\ln(t_1 - t_2)|^p \vee 1\right) \eta, \quad \text{м.н.},$$

та існують константи $C_1 = C_1(\delta, p) > 0$ *and* $C_2 = C_2(\delta, p) > 0$ *такі, що для всіх* $u > 0$,

$$\mathrm{P}(\eta > u) \leq C_1 \exp(-C_2 u^2).$$

Процес Орнштейна – Уленбека

Процес Орнштейна – Уленбека – це розв'язок наступного диференціального рівняння:

$$Y_t = y_0 + \theta \int_0^t Y_s \, ds + \sigma X_t, \quad t \geq 0,$$

де

$y_0 \in \mathbb{R}$ – початкове значення,

$\theta > 0$ – параметр зсуву, константа,

$\sigma > 0$ – коефіцієнт дифузії, константа,

$\{X_t, t \geq 0\}$ – шум (ТДБР і ТДБРІІ).

Оцінювання параметра зсуву

Схема спостережень для дискретного випадку. Розглядаємо відрізок $[0, n^{m-1}]$, де $n > 1$ і $m > 1$. Беремо крок $\delta = n^{-1}$. Отримаємо n^{m-1} спостереження, де моменти спостережень позначимо як $t_{k,n} = kn^{-1}$, де $0 \le k \le n^m$.

З неперервного процесу $\{Y_t : 0 \le t \le n^{m-1}\}$, обираємо лише значення у дискретних точках $t_{k,n}$ та використаємо позначення $Y_{k,n} := Y_{t_{k,n}}$.

Неперервна оцінка $\widehat{\theta}_T$

$$\widehat{\theta}_T = \frac{Y_T^2 - y_0^2}{2\int_0^T Y_t^2\, dt}$$

Дискретна оцінка $\widetilde{\theta}_n(m)$

$$\widetilde{\theta}_n(m) = \frac{n\left(Y_{nm-1}^2 - y_0^2\right)}{2\sum_{k=0}^{nm-1} Y_{k,n}^2}$$

Теорема

Оцінка $\widehat{\theta}_T$ є строго конзистентною при $T \to \infty$.

Теорема

Оцінка $\widetilde{\theta}_n(m)$ є сторого конзистентною при $n \to \infty$.

Моделювання значень темперованого процесу Орнштейна – Уленбека

Мова програмування: R.

Рівняння: $Y_t = y_0 + \theta \int_0^t Y_s\, ds + \sigma X_t, \quad t \geq 0.$

Початкове значення: $y_0 = 1.$

Значення параметрів рівняння: $\theta = 2$ і $\sigma = 1.$

Значення параметрів шуму (ТДБР $B^I_{H,\lambda}$ і ТДБРІІ $B^{II}_{H,\lambda}$):
$\lambda \in \{0.05, 0.25, 0.5\}$ та $H \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.2, 1.4\}$

Кількість траєкторій: 1000.

Оцінка: $\widetilde{\theta}_n(m) = \frac{n\left(Y^2_{n^{m-1}} - y_0^2\right)}{2\sum_{k=0}^{n^{m-1}} Y^2_{k,n}}$ для дискретних спостережень.

Інтервал: $[0, 10]$. **Значення величин** n **та** m**:**

при $m = 5/4$: було розглянуто $n = 100$, $n = 1000$ і $n = 10000$.

при $m = 4/3$: було розглянуто $n = 100$ і $n = 1000$.

Вибіркове середнє $\widetilde{\theta}_n$ для $m = 4/3$

		ТДБР			ТДБРII		
H	n	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$
0.2	250	1.268788	1.268847	1.268858	1.268909	1.268859	1.268844
	500	1.592368	1.592369	1.592369	1.592372	1.592369	1.592368
	1000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000
0.4	250	1.268855	1.268877	1.268858	1.268857	1.268855	1.268857
	500	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369
	1000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000
0.6	250	1.268858	1.268855	1.268855	1.268853	1.268857	1.268853
	500	1.592369	1.592369	1.592369	1.592368	1.592369	1.592369
	1000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000
0.8	250	1.268847	1.268855	1.268856	1.268857	1.268857	1.268855
	500	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369
	1000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000
1.2	250	1.268866	1.268854	1.268856	1.268862	1.268834	1.268838
	500	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369	1.592368	1.592369
	1000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000
1.4	250	1.268857	1.268857	1.268856	1.268837	1.268859	1.268863
	500	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369
	1000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000

Стандартне відхилення $\widetilde{\theta}_n$ для $m = 4/3$

		ТДБР			ТДБРII		
H	n	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$
0.2	250	$1.9997 \cdot 10^{-03}$	$3.5499 \cdot 10^{-04}$	$6.9153 \cdot 10^{-05}$	$1.6281 \cdot 10^{-03}$	$7.6248 \cdot 10^{-05}$	$3.4846 \cdot 10^{-04}$
	500	$4.3271 \cdot 10^{-05}$	$8.3467 \cdot 10^{-06}$	$1.0356 \cdot 10^{-05}$	$8.0224 \cdot 10^{-05}$	$2.8033 \cdot 10^{-06}$	$3.8018 \cdot 10^{-05}$
	1000	$6.2666 \cdot 10^{-07}$	$1.6395 \cdot 10^{-07}$	$9.3021 \cdot 10^{-08}$	$2.6986 \cdot 10^{-06}$	$5.6858 \cdot 10^{-08}$	$1.9929 \cdot 10^{-07}$
0.4	250	$6.5395 \cdot 10^{-05}$	$5.0709 \cdot 10^{-04}$	$5.2621 \cdot 10^{-05}$	$4.0962 \cdot 10^{-05}$	$5.9937 \cdot 10^{-05}$	$6.6379 \cdot 10^{-05}$
	500	$2.1335 \cdot 10^{-06}$	$2.1333 \cdot 10^{-05}$	$2.6852 \cdot 10^{-06}$	$1.6134 \cdot 10^{-06}$	$5.4587 \cdot 10^{-06}$	$3.0793 \cdot 10^{-06}$
	1000	$7.5702 \cdot 10^{-08}$	$1.1535 \cdot 10^{-07}$	$1.1471 \cdot 10^{-07}$	$5.1099 \cdot 10^{-08}$	$6.2280 \cdot 10^{-08}$	$6.9588 \cdot 10^{-08}$
0.6	250	$4.8083 \cdot 10^{-05}$	$2.6463 \cdot 10^{-05}$	$1.9945 \cdot 10^{-05}$	$9.0090 \cdot 10^{-05}$	$9.9179 \cdot 10^{-05}$	$1.0640 \cdot 10^{-04}$
	500	$6.1121 \cdot 10^{-06}$	$1.6543 \cdot 10^{-06}$	$1.5960 \cdot 10^{-06}$	$2.3875 \cdot 10^{-05}$	$2.1153 \cdot 10^{-06}$	$4.2449 \cdot 10^{-06}$
	1000	$9.3252 \cdot 10^{-08}$	$2.0269 \cdot 10^{-08}$	$3.9338 \cdot 10^{-08}$	$2.6170 \cdot 10^{-07}$	$2.7869 \cdot 10^{-08}$	$9.5062 \cdot 10^{-08}$
0.8	250	$4.1416 \cdot 10^{-04}$	$3.9851 \cdot 10^{-05}$	$1.5541 \cdot 10^{-05}$	$6.3931 \cdot 10^{-05}$	$8.0856 \cdot 10^{-05}$	$4.1361 \cdot 10^{-05}$
	500	$1.1347 \cdot 10^{-05}$	$1.7778 \cdot 10^{-06}$	$5.8001 \cdot 10^{-06}$	$2.4166 \cdot 10^{-06}$	$3.2078 \cdot 10^{-06}$	$1.1505 \cdot 10^{-05}$
	1000	$1.2129 \cdot 10^{-07}$	$3.4435 \cdot 10^{-08}$	$3.5659 \cdot 10^{-08}$	$1.7653 \cdot 10^{-07}$	$5.3886 \cdot 10^{-08}$	$1.0734 \cdot 10^{-07}$
1.2	250	$1.5651 \cdot 10^{-04}$	$1.4593 \cdot 10^{-04}$	$6.7546 \cdot 10^{-06}$	$1.1707 \cdot 10^{-04}$	$6.8233 \cdot 10^{-04}$	$4.3279 \cdot 10^{-04}$
	500	$5.0710 \cdot 10^{-06}$	$9.9194 \cdot 10^{-06}$	$2.8924 \cdot 10^{-07}$	$7.0722 \cdot 10^{-06}$	$2.9152 \cdot 10^{-05}$	$1.0933 \cdot 10^{-05}$
	1000	$1.9460 \cdot 10^{-07}$	$1.7918 \cdot 10^{-07}$	$5.9246 \cdot 10^{-09}$	$1.0615 \cdot 10^{-07}$	$2.2170 \cdot 10^{-07}$	$2.4456 \cdot 10^{-07}$
1.4	250	$1.0252 \cdot 10^{-04}$	$7.1823 \cdot 10^{-05}$	$6.2743 \cdot 10^{-06}$	$5.6380 \cdot 10^{-04}$	$7.4692 \cdot 10^{-05}$	$1.1007 \cdot 10^{-04}$
	500	$7.3125 \cdot 10^{-06}$	$1.1500 \cdot 10^{-05}$	$3.2318 \cdot 10^{-07}$	$2.2496 \cdot 10^{-05}$	$3.1634 \cdot 10^{-06}$	$4.0389 \cdot 10^{-06}$
	1000	$1.5571 \cdot 10^{-07}$	$2.1325 \cdot 10^{-07}$	$6.2200 \cdot 10^{-09}$	$9.3998 \cdot 10^{-07}$	$6.7855 \cdot 10^{-08}$	$8.1683 \cdot 10^{-08}$

Вибіркове середнє $\widetilde{\theta}_n$ для $m = 5/4$

		ТДБР			ТДБРII		
H	n	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$
0.2	2500	1.415258	1.415231	1.415229	1.415229	1.415230	1.415231
	5000	1.682306	1.682304	1.682305	1.682305	1.682305	1.682304
	10000	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200
0.4	2500	1.415230	1.415225	1.415241	1.415232	1.415228	1.415225
	5000	1.682305	1.682305	1.682304	1.682305	1.682305	1.682305
	10000	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200
0.6	2500	1.415231	1.414944	1.415231	1.415231	1.415230	1.415230
	5000	1.682305	1.682281	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305
	10000	2.000200	2.000199	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200
0.8	2500	1.415227	1.415231	1.415231	1.415232	1.415231	1.415230
	5000	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305
	10000	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200
1.2	2500	1.415236	1.415230	1.415230	1.415230	1.415229	1.415230
	5000	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305
	10000	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200
1.4	2500	1.415232	1.415231	1.415230	1.415231	1.415229	1.415230
	5000	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305
	10000	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200

Стандартне відхилення $\widetilde{\theta}_n$ для $m = 5/4$

		ТДБР			ТДБРII		
H	n	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$
0.2	2500	$8.4350 \cdot 10^{-04}$	$2.4394 \cdot 10^{-05}$	$4.9201 \cdot 10^{-05}$	$3.0249 \cdot 10^{-05}$	$1.8264 \cdot 10^{-05}$	$7.7357 \cdot 10^{-05}$
	5000	$3.5145 \cdot 10^{-05}$	$5.3186 \cdot 10^{-06}$	$5.9345 \cdot 10^{-06}$	$3.6694 \cdot 10^{-06}$	$1.7982 \cdot 10^{-06}$	$6.1008 \cdot 10^{-06}$
	10000	$2.0706 \cdot 10^{-06}$	$1.2148 \cdot 10^{-07}$	$5.4094 \cdot 10^{-07}$	$6.4181 \cdot 10^{-08}$	$8.2159 \cdot 10^{-08}$	$2.3023 \cdot 10^{-07}$
0.4	2500	$1.9432 \cdot 10^{-05}$	$1.5160 \cdot 10^{-04}$	$3.2868 \cdot 10^{-04}$	$3.2687 \cdot 10^{-05}$	$7.1024 \cdot 10^{-05}$	$1.2848 \cdot 10^{-04}$
	5000	$9.6117 \cdot 10^{-07}$	$4.4393 \cdot 10^{-06}$	$7.4030 \cdot 10^{-06}$	$1.3129 \cdot 10^{-06}$	$6.2374 \cdot 10^{-06}$	$3.6981 \cdot 10^{-06}$
	10000	$6.0144 \cdot 10^{-08}$	$4.5926 \cdot 10^{-07}$	$7.1825 \cdot 10^{-07}$	$1.2477 \cdot 10^{-07}$	$5.6128 \cdot 10^{-07}$	$2.7313 \cdot 10^{-07}$
0.6	2500	$6.8152 \cdot 10^{-06}$	$9.0504 \cdot 10^{-03}$	$2.1613 \cdot 10^{-05}$	$1.4843 \cdot 10^{-05}$	$1.8412 \cdot 10^{-05}$	$1.4553 \cdot 10^{-05}$
	5000	$8.6851 \cdot 10^{-07}$	$7.5915 \cdot 10^{-04}$	$4.7399 \cdot 10^{-06}$	$9.7171 \cdot 10^{-07}$	$1.6972 \cdot 10^{-06}$	$1.6803 \cdot 10^{-06}$
	10000	$7.4942 \cdot 10^{-08}$	$2.4013 \cdot 10^{-05}$	$6.8452 \cdot 10^{-08}$	$5.4407 \cdot 10^{-08}$	$1.1327 \cdot 10^{-07}$	$1.5761 \cdot 10^{-07}$
0.8	2500	$1.0037 \cdot 10^{-04}$	$1.9593 \cdot 10^{-05}$	$1.5725 \cdot 10^{-05}$	$6.8951 \cdot 10^{-05}$	$2.9703 \cdot 10^{-05}$	$1.2062 \cdot 10^{-05}$
	5000	$7.9395 \cdot 10^{-07}$	$1.2566 \cdot 10^{-06}$	$5.5416 \cdot 10^{-07}$	$7.1800 \cdot 10^{-06}$	$1.6409 \cdot 10^{-06}$	$5.9543 \cdot 10^{-07}$
	10000	$2.2371 \cdot 10^{-07}$	$7.3027 \cdot 10^{-08}$	$3.0269 \cdot 10^{-07}$	$1.0607 \cdot 10^{-07}$	$7.4764 \cdot 10^{-08}$	$3.9592 \cdot 10^{-08}$
1.2	2500	$1.8460 \cdot 10^{-04}$	$5.5355 \cdot 10^{-06}$	$4.1290 \cdot 10^{-06}$	$4.1102 \cdot 10^{-05}$	$3.1240 \cdot 10^{-05}$	$2.6083 \cdot 10^{-05}$
	5000	$2.6353 \cdot 10^{-05}$	$6.7311 \cdot 10^{-07}$	$1.1992 \cdot 10^{-07}$	$1.9263 \cdot 10^{-06}$	$3.5026 \cdot 10^{-06}$	$7.1713 \cdot 10^{-06}$
	10000	$1.2649 \cdot 10^{-06}$	$2.0003 \cdot 10^{-08}$	$1.7318 \cdot 10^{-08}$	$6.5946 \cdot 10^{-08}$	$1.8823 \cdot 10^{-07}$	$8.1930 \cdot 10^{-08}$
1.4	2500	$2.3036 \cdot 10^{-05}$	$8.3351 \cdot 10^{-06}$	$5.0158 \cdot 10^{-06}$	$1.7493 \cdot 10^{-05}$	$2.5415 \cdot 10^{-05}$	$7.3485 \cdot 10^{-06}$
	5000	$4.6750 \cdot 10^{-06}$	$8.6370 \cdot 10^{-07}$	$1.1373 \cdot 10^{-07}$	$1.6592 \cdot 10^{-06}$	$2.2547 \cdot 10^{-06}$	$7.1412 \cdot 10^{-07}$
	10000	$3.0744 \cdot 10^{-07}$	$3.8827 \cdot 10^{-08}$	$1.2423 \cdot 10^{-08}$	$7.9098 \cdot 10^{-08}$	$1.1680 \cdot 10^{-07}$	$2.0048 \cdot 10^{-08}$

Основні результати дослідження:

- виведено властивості статистик від дисктерних значень розв'язків рівняння Васічека;
- отримано оцінку для одночасно всіх трьох параметрів моделі Васічека за дискретними спостереженнями та доведено їх строгу конзистентність і асимптотичну нормальність та встановлено асимптотичну коваріаційну матрицю;
- доведено асимптотичну нормальність оцінки параметрів зсуву за узагальненим методом моментів у моделі Кокса – Інгерсолла – Росса за неперервними спостереженнями та встановлено її коваріаційну матрицю;
- побудовано дискретний аналог зазначеної оцінки параметрів зсуву, доведено його строгу конзистентність і асимптотичну нормальність та встановлено відповідну коваріаційну матрицю;
- отримано оцінки для дисперсій та приростів ТДБР і ТДБРІІ, а також встановлено асимптотичні оцінки зверху для приростів цих процесів;
- доведено строгу конзистентність оцінки параметра зсуву типу найменших квадратів у моделях Орнштейна–Уленбека, керованих ТДБР та ТДБРІІ;
- побудовано дискретний аналог оцінки параметра зсуву та доведено його строгу конзистентність;
- створено програмний код для моделювання траєкторій ТДБР та ТДБРІІ;
- для всіх трьох процесів проведено чисельні експерименти у середовищі програмування R, які підтвердили теоретичні результати.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Конференції:

1) I Міжнародна науково-практична конференція студентів та молодих вчених «Математика та математичне моделювання у сучасному технічному університеті», 30 листопада, 2022, Луцьк, Україна;
2) XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023», 14 квітня, 2023, Київ, Україна;
3) International Conference of Young Mathematicians, June 1–3, 2023, Kyiv, Ukraine;
4) XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського, 11–12 жовтня 2023, Київ, Україна;
5) Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2023», December 26-27, 2023, Kyiv, Ukraine;
6) XXII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2024», 11 квітня, 2024, Київ, Україна;
7) XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, 9-11 травня, 2024, Київ, Україна;
8) Ukraine Mathematics Conference At the End of the Year 2024, December 16-18, 2024, Kyiv, Ukraine;
9) XXIII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2025», 10 квітня, 2025, Київ, Україна;
10) International Conference of Young Mathematicians, June 4–6, 2025, Kyiv, Ukraine;
11) XX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 17–20 листопада, 2025, Київ, Україна.

Семінари

Аспірантський воркшоп з теорії ймовірностей, 4 лютого 2026 року, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету та кафедра дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.

Статті

Розділ 2 опубліковано у статтях

Prykhodko O., Ralchenko K. Strongly consistent estimation of all parameters in the Vasicek model by discrete observations *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*. 2022. no. 4.P. 26–30.

Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic normality of estimators for all parameters in the Vasicek model by discrete observations *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 2024. Vol. 111. P. 123 – 135.

Розділ 3 опубліковано у статті

Prykhodko O., Ralchenko K. Discretization and Asymptotic Normality of Drift Parameters Estimator in the Cox-Ingersoll-Ross Model *Austrian Journal of Statistics*. 2025. Vol. 54, no. 1. P. 82 – 99.

Розділ 4 опубліковано у статті

Prykhodko O., Ralchenko K. Drift parameter estimation for tempered fractional Ornstein–Uhlenbeck processes based on discrete observations". *Modern Stochastics: Theory and Applications* Volume 13, Issue 2 (2026), pp. 169–194